

Vers la logique des prédicats

Les propositions atomiques sont en général composées

- d'objets (ce dont on parle)
- d'un prédicat (ce qu'on en dit).

Exemple:

“Jules est grand”,

prédicat: *est grand*

objet: *Jules*.

“Jules mange une pomme”,

prédicat: *mange*

objets: *Jules et pomme*.

Mise en évidence des prédicats

On pourrait réécrire les propositions précédentes sous une forme qui met en évidence le prédicat et les objets, soit :

est_grand(Jules)

mange(Jules, pomme)

La forme habituelle est:

nom_prédicat(objet1, objet2, ...).

Notations particulières

Dans certains domaines comme les mathématiques des notations particulières ont été inventées pour exprimer certains prédicats.

On écrit

$$3 < 56$$

plutôt que

inférieur(3, 56),

$$1/2 = 3/6$$

plutôt que

égal(1/2, 3/6)

Les variables

L'introduction de variables permet de formuler deux types d'énoncés.

Les énoncés universels

les variables représentent tous les objets d'un domaine.

Les énoncés existentiels

une variable sert à exprimer l'existence de quelque chose, sans qu'on connaisse encore précisément cette chose.

Exemples

Universel (\forall)

- dans le domaine des nombres entiers: $x < x+1$
- dans l'énoncé suisse(x) \Rightarrow europeen(x),
 x : n'importe quelle valeur du domaine.

Existentiel (\exists)

- dans l'équation $3x - 8 = 22$
 x : un nombre, encore inconnu, qui a la propriété spécifiée.
- dans pere("Joe", x)
 x : la personne qui est le père de "Joe".

Fonctions

La logique des prédicats contient la notion de fonction.

Les fonctions considérées sont des fonctions à 0, 1 ou plusieurs paramètres.

Par exemple:

age: fonction à un paramètre qui fournit l'age d'une personne

distance: fonction à deux paramètres qui fournit la distance entre deux points.

Syntaxe

Pour écrire des formules de logique des prédicats, on commence par se donner un *vocabulaire* (ou signature) W composé de symboles de différents types :

- variables (x, y, z, \dots)
- constantes (a, b, c, \dots)
- fonctions (f, g, h, \dots)
- prédicats (p, q, r, \dots)

à chaque symbole de fonction et de prédicat est associée une *arité* qui est un entier positif ou nul. On peut considérer que les constantes sont des fonctions 0-aires.

Le vocabulaire dépend du domaine étudié

Exemples

Théorie des nombres :

constantes : 0 et 1

variables : $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$

fonctions : (binaires) : $+$, \times

prédicat (binaire) : $=$

Généalogie

constantes : {adam, ève, césar, auguste, agripine, marie, albert, ..., 0, 1, ..., 2000, 2001, 2002}

variables : $\{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots\}$

fonction : 1-aire: date_naissance, date_décès; 2-aire: date_marriage

prédicats : 1-aire: femme, homme; 3-aire: enfant_de, marriage

Termes du langage

Tout ce qu'on peut faire avec des constantes, variables et fonctions.

- une constante c est un terme
- une variable x est un terme
- si t_1, \dots, t_n sont des termes et f une fonction n -aire, $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme.

Exemples

c

$f(x, c)$

$f(x, g(y, d, z))$

Formules

Une formule est soit

- une *formule atomique* $p(t_1, \dots, t_n)$
où p est un symbole de prédicat n -aire et t_1, \dots, t_n sont des termes.

- $\neg w$
- $w_1 \vee w_2$
- $w_1 \wedge w_2$
- $w_1 \Rightarrow w_2$
- $w_1 \Leftrightarrow w_2$
- $\forall x w$
- $\exists x w$

où x est une variable et w, w_1, w_2 sont des formules

Priorité des opérateurs

(\forall, \exists) avant (\neg) avant (\vee, \wedge) avant $(\Rightarrow, \Leftrightarrow)$

$\neg \alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$ signifie $((\neg \alpha) \vee \beta) \Rightarrow \gamma$

$\forall x \beta \Rightarrow \gamma$ signifie $(\forall x \beta) \Rightarrow \gamma$

différent de $\forall x (\beta \Rightarrow \gamma)$

Exemple - théorie des nombres

Vocabulaire :

constantes : 0 et 1

variables: x, y, z, x_1, y_1, z_1 , etc.

fonctions (binaires) : $+$ et \times

prédicat (binaire) : $=$

Termes :

- $0 + 1$
- $z \times (y + 1)$

Formules :

- $0 + 1 = 1$
- $x + (z \times (y + 1)) + 1 = 0 \wedge x + z = 1$
- $\forall x (\neg x = 0 \Rightarrow \exists y y + 1 = x)$

Exemple - personnes

Vocabulaire:

- constantes: *jean*, *isidore*, *ida*, *maria*,
- fonction: *age*
- prédicats: *_=_*, *_>_*, *aime(_ , _)*

Formules:

- $age(jean) = age(ida)$
- $aime(ida, isidore)$
- $\forall x \text{ aime}(x, ida)$
- $\exists x \exists y (aime(x, y) \wedge \neg aime(y, x))$
- $\forall x \forall y (age(x) > age(y) \Rightarrow aime(x, y))$

Variables libres et liées

Les variables qui apparaissent dans une formule sont dites libres ou liées, selon le principe suivant:

- toutes les variables d'une formule sans quantificateur sont libres
- si x est libre dans w , x est liée dans $\forall x w$ et dans $\exists x w$

Exemple

$p(x) \Rightarrow q(y)$ x, y libres

$\forall x (p(x) \Rightarrow r(y, x))$ x liée, y libre

$\forall x (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow r(x)$ x libre, mais liée dans la partie de gauche

variables

Danger de confusion, renommer les

Formules fermée et ouvertes

Une formule dont toutes les variables sont liées est dite

.

Par exemple:

$$\forall x (p(x) \Rightarrow \exists y q(x, y))$$

Une formule avec une ou des variables libre est dite *ouverte*.

On notera $w(x, y, z)$ pour indiquer quelles sont les variables libres de w .

P.ex.

$$w(x, z) = p(x) \Rightarrow \exists y q(x, y, z)$$

est une formule ouverte où x et z sont libres.

Une formule fermée est aussi appelée *proposition*.

Sémantique du calcul des prédicats

Le sens d'une formule fermée sera l'une des valeurs booléennes **vrai (1)** ou **faux (0)**.

Pour pouvoir interpréter une formule il faut

- donner une valeur aux variables
- donner une valeur à chaque constante
- un moyen d'interpréter les atomes

$$p(t_1, \dots, t_n)$$

- un moyen d'interpréter les fonctions

$$f(t_1, \dots, t_n)$$

- une règle d'interprétation des formules quantifiées

Rappel

Une *fonction* n -aire f sur un ensemble A

$$f : A^n \rightarrow A$$

associe à un n -tuple de valeurs (a_1, \dots, a_n) une valeur $f(a_1, \dots, a_n) = a \in A$

Une *relation* n -aire r sur un ensemble A

$$r \subseteq A^n$$

est un ensemble de n -tuples (a_1, \dots, a_n) dont les éléments appartiennent à A

Interprétations (structure)

W le vocabulaire utilisé pour écrire des formules (var, const, préd, fonct.).

Une *interprétation* I d'un vocabulaire W (ou *structure relationnelle* sur W) est la donnée de:

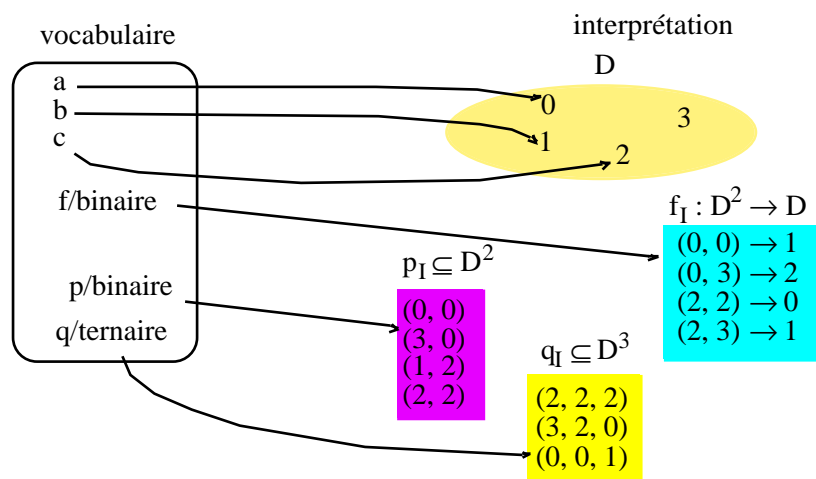
- un ensemble D appelé *domaine* de l'interprétation
- une fonction de signification m_I qui assigne
 - à chaque constante c de W , un élément c_I de D
 - à chaque symbole de fonction n -aire f , une fonction

$$f_I : D^n \rightarrow D$$

- à chaque symbole de prédicat n -aire p une relation n -aire p_I sur D

$$p_I \subseteq D^n$$

Exemple



Valuation des variables et termes

L'interprétation des variables dépend des valeurs qu'on leur assigne

X un ensemble de variables

Un *valuation* u de X assigne à chaque variable x de X une valeur $u(x) \in D$

La valuation s'étend aux termes :

constantes:

$$u(c) = c_I$$

fonctions:

$$u(f(t_1, \dots, t_n)) = f_I(u(t_1), \dots, u(t_n))$$

Principe : remplacer les variables par leur valeur et évaluer les constantes et fonctions.

Exemple

Interprétation:

$D = \{0, 1, 2, 3\}$

$a_I = 0, b_I = 1, c_I = 2, d_I = 3$

$f_I(0, 0) = 0, f_I(0, 1) = 0, f_I(1, 0) = 2, f_I(2, 3) = 2, f_I(3, 3) = 3$

Valuation:

$X = \{x, y\}, u(x) = 1, u(y) = 0$

donc

- $u(a) = 0$
- $u(f(a, x)) = 0$
- $u(f(x, f(y, b))) = f_I(1, f_I(0, 1)) = f_I(1, 0) = 2$

Interprétation des formules (1)

I_u une interprétation, u une valuation des termes

Formules atomiques

$I_u(p(t_1, \dots, t_n)) = \text{vrai}$ si $(u(t_1), \dots, u(t_n)) \in p_I$
 = **faux** sinon

La relation p_I donne l'ensemble des valeurs de paramètres pour lesquels

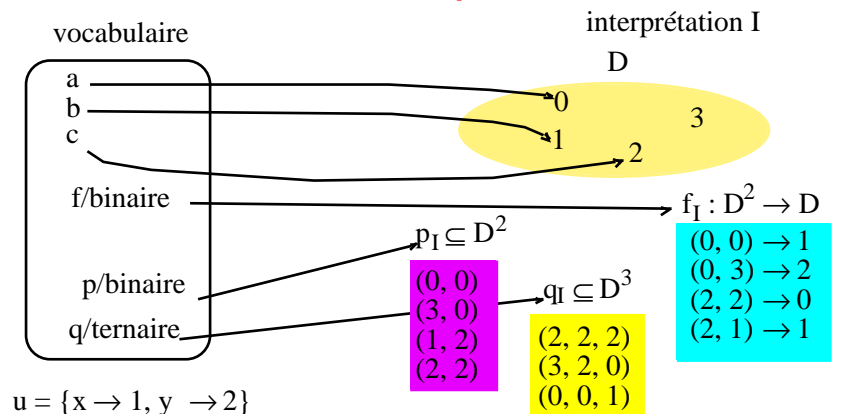
$p(t_1, \dots, t_n)$ est vrai

Autre notation:

$I, u \models p(t_1, \dots, t_n)$ si et seulement si $(u(t_1), \dots, u(t_n)) \in p_I$

I, u satisfait $p(t_1, \dots, t_n)$.

Exemple



$I_u(p(b, c)) = \text{vrai}$

$I_u(p(y, a)) = \text{faux}$

$I_u(q(a, a, f(c, b))) = q_I(0, 0, f_I(2, 1)) = \text{vrai}$

$I_u \models p(b, c)$

$I_u \not\models p(y, a)$

$I_u \models q(a, a, f(c, b))$

Interprétation des formules (2)

• $I_u(w_1 \wedge w_2) = \text{vrai}$ si $I_u(w_1) = \text{vrai}$ et $I_u(w_2) = \text{vrai}$
 = **faux** sinon

• $I_u(w_1 \vee w_2) = \text{vrai}$ si $I_u(w_1) = \text{vrai}$ ou $I_u(w_2) = \text{vrai}$
 = **faux** sinon

• $I_u(w_1 \Rightarrow w_2) = \text{vrai}$ si $I_u(w_1) = \text{faux}$ ou $I_u(w_2) = \text{vrai}$
 = **faux** sinon

• $I_u(w_1 \Leftrightarrow w_2) = \text{vrai}$ si $I_u(w_1) = I_u(w_2)$
 = **faux** sinon

• $I_u(\neg w_1) = \text{vrai}$ si $I_u(w_1) = \text{faux}$
 = **faux** sinon

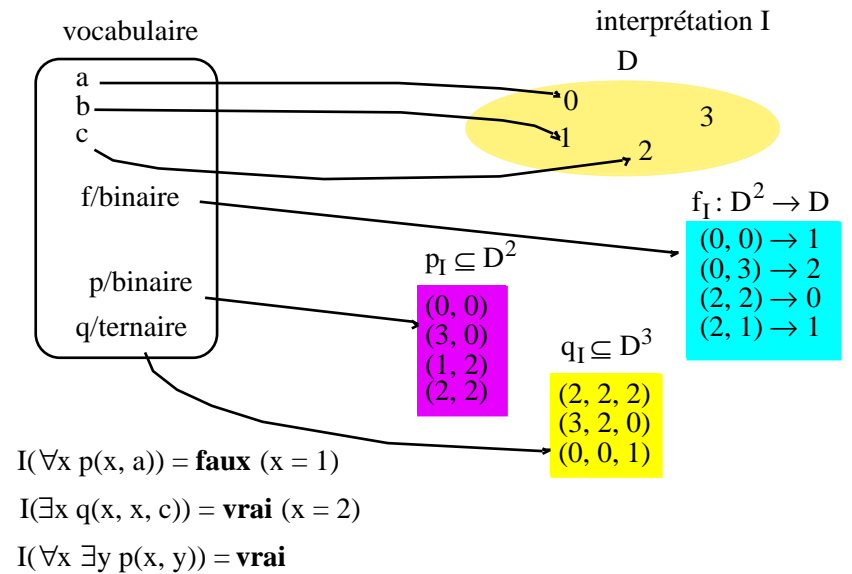
Mêmes conventions qu'en logique des propositions

Interprétation des formules (3)

Formules quantifiées

- $I_u(\forall x w) = \text{vrai}$ ssi pour tout $d \in D$, $I_{u[x \rightarrow d]}(w) = \text{vrai}$
 $u[x \rightarrow d]$ = la valuation u à laquelle on impose $u(x) = d$
 \Rightarrow on remplace x successivement par toutes les valeurs de D et la formule doit être vraie à chaque fois.
- $I_u(\exists x w) = \text{vrai}$ ssi il y a un $d \in D$ tel que $I_{u[x \rightarrow d]}(w) = \text{vrai}$
 On doit trouver au moins une valeur dans D qui rend la formule w vraie.

Exemple



Interprétation des formules fermées

Si w est une formule fermée (sans variables libres)

L'interprétation de w ne dépend pas de la valuation u

si $I_u(w) = \text{vrai}$ alors pour tout v $I_v(w) = \text{vrai}$

- les valeurs des constantes et des termes dépendent de I et pas de u
- aucune valeur de variable donnée par u n'est utilisée

On écrira $I(w)$

Exemple.

$W = \{p, a, i, t, m \text{ (constantes)}, x, y \text{ (variables)}, \text{ville (1-aire), personne (1-aire), habite (2-aire)}, \}$

Interprétation I:

$D = \{\text{Paul, Albert, Milan, Tokyo, Madrid}\}$

$p = \text{Paul}, a_I = \text{Albert},$

$i_I = \text{Milan}, t_I = \text{Tokyo}, m_I = \text{Madrid}$

$\text{ville}_I = \{(\text{Milan}), (\text{Tokyo}), (\text{Madrid})\}$

$\text{personne}_I = \{(\text{Paul}), (\text{Albert})\}$

$\text{habite}_I = \{(\text{Paul, Milan}), (\text{Albert, Tokyo})\}.$

Interprétations de formules selon I

1. $I(a) = \text{Albert}$.
2. $I(\text{ville}(t))$
 $= (I(t)) \in \text{ville}_I$
 $= (\text{Tokyo}) \in \text{ville}_I = \text{vrai}$.
3. $I(\text{ville}(p)) = \text{faux}$.
 $(\text{paul}) \notin \text{ville}_I$
4. $I(\text{habite}(p, t))$
 $= (I(p), I(t)) \in \text{habite}_I$
 $= (\text{Paul}, \text{Tokyo}) \in \text{habite}_I = \text{faux}$.

Formules quantifiées

1. $I(\exists x \text{ habite}(x, t)) = \text{vrai}$
car $I_{(x \rightarrow \text{Albert})}(\text{habite}(x, t)) = \text{vrai}$.
2. $I(\forall x \exists y \text{ habite}(x, y)) = \text{faux}$
car $I_{[x \rightarrow \text{Tokyo}]}(\exists y \text{ habite}(x, y)) = \text{faux}$, entre autres.
3. $I(\forall x (\text{personne}(x) \Rightarrow \exists y \text{ habite}(x, y))) = \text{v}$ car
 $I_{[x \rightarrow \text{Paul}]}(\text{personne}(x) \Rightarrow \exists y \text{ habite}(x, y)) = \text{v}$ (prendre $y \rightarrow \text{Milan}$)
 $I_{[x \rightarrow \text{Albert}]}(\text{personne}(x) \Rightarrow \exists y \text{ habite}(x, y)) = \text{v}$ (prendre $y \rightarrow \text{Tolyo}$)
 $I_{[x \rightarrow \text{Milan}]}(\text{personne}(x) \Rightarrow \exists y \text{ habite}(x, y)) = \text{v}$ (car $\text{personne}(x) = \text{f}$)
etc.

Attention au domaine !

$D = \{\text{Paul}, \text{Albert}, \text{Milan}, \text{Tokyo}, \text{Madrid}\}$
 $\text{ville}_I = \{(\text{Milan}), (\text{Tokyo}), (\text{Madrid})\}$
 $\text{personne}_I = \{(\text{Paul}), (\text{Albert})\}$

- $I(\forall x (\text{ville}(x) \vee \text{personne}(x))) = \text{vrai}$

$D = \{\text{Paul}, \text{Albert}, \text{Milan}, \text{Tokyo}, \text{Madrid}, \text{Amsterdam}\}$
 $\text{ville}_I = \{(\text{Milan}), (\text{Tokyo}), (\text{Madrid})\}$
 $\text{personne}_I = \{(\text{Paul}), (\text{Albert})\}$

- $I(\forall x (\text{ville}(x) \vee \text{personne}(x))) = \text{faux}$

Attention aux cas d'identité des variables

$D = \{\text{Milan}, \text{Tokyo}\} \cup \mathbf{N}$
 $\text{ville}_I = \{(\text{Milan}), (\text{Tokyo})\}$
 $\text{distance}_I = \{(\text{Milan}, \text{Tokyo}, 12000), (\text{Tokyo}, \text{Milan}, 12000)\}$

1. $I(\forall x \forall y \exists z \text{ distance}(x, y, z)) = \text{faux} !$
(à cause du domaine)

2. $I(\forall x \forall y (\text{ville}(x) \wedge \text{ville}(y) \Rightarrow \exists z \text{ distance}(x, y, z))) = \text{faux} !$
(si $x = y \dots$)

Pour obtenir un modèle, ajouter : $(\text{Milan}, \text{Milan}, 0), (\text{Tokyo}, \text{Tokyo}, 0)$

Formules satisfaisables

A est vraie pour l'interprétation I si $I(A) = \text{vrai}$.

Dans ce cas I est un *modèle* de A

notations: $I \models A$, $I \not\models A$ si $I(A) = \text{faux}$.

A est *satisfaisable* s'il existe une interprétation I telle que $I \models A$

A est *valide* si pour toute interprétation I on a $I \models A$

notation: $\models A$

A et B sont *équivalentes*

si pour toute interprétation I on a $I(A) = I(B)$.

notation: $A \approx B$ ou $A \leftrightarrow B$, p.ex. $\forall x \text{ Personne}(x) \approx \neg \exists x (\neg \text{Personne}(x))$

Ensembles de formules satisfaisables

$F = \{w_1, \dots, w_n\}$ un ensemble de formules fermées,
un *modèle* de F est une interprétation I telle que $I(w_i) = v$ pour $i = 1, \dots, n$.

F est *satisfaisable* s'il existe au moins un modèle de F.

Sinon F est *inconsistant*.

Exemple

$F = \{p(a, b), \neg \exists y p(a, y)\}$

est inconsistent.

pour avoir $I \models p(a, b)$

il faut que (a_I, b_I) appartienne à p_I

mais alors $I \not\models \neg \exists y p(a, y)$

Conséquences logiques

w est une *conséquence logique* de F

si pour tout modèle I de F, $I \models w$.

notation: $F \models w$,

si $F \models \mathbf{0}$ (la formule qui est toujours fausse)

alors F est inconsistent.

Principe de déduction

$\{w_1, \dots, w_n\} \models w$ si et seulement si $\{w_1, \dots, w_n, \neg w\} \models \mathbf{0}$

Utile pour prouver que w est conséquence logique de $\{w_1, \dots, w_n\}$.

Système déductif

Axiomes : ceux de la logique des propositions plus ...

F n'importe quelle formule, t un terme tel que la substitution $F(x/t)$ est admissible (en particulier, t peut être x lui-même):

- $\forall x F(x) \Rightarrow F(t)$ (cas particulier, $\forall x F(x) \Rightarrow F(x)$),
- $F(t) \Rightarrow \exists x F(x)$ (cas particulier, $F(x) \Rightarrow \exists x F(x)$),

G une formule qui ne contient pas x comme variable libre :

- $\forall x (G \Rightarrow F(x)) \Rightarrow (G \Rightarrow \forall x F(x))$,
- $\forall x (F(x) \Rightarrow G) \Rightarrow (\exists x F(x) \Rightarrow G)$,

Règles

(Modus ponens) $F, F \Rightarrow G \rightarrow G$

(Généralisation) $F \rightarrow \forall x F$

Un théorèmes de déduction

Ce théorèmes sert à prouver des implications de la forme $B \Rightarrow C$.

Si à partir des axiomes et des formules A_1, A_2, \dots, A_n (les hypothèses) et de B

on peut prouver C

Alors, à partir des axiomes et des formules A_1, A_2, \dots, A_n

on peut prouver $B \Rightarrow C$

Pour autant que la généralisation ne soit jamais appliquée à une variable libre de B dès que B apparaît dans la preuve.

Normalisation des formules

Mise en forme prenex (les quantificateurs devant)

Skolemisation (suppression des \exists)

Mise en forme normale conjonctive

Mise en forme clausale (suppression des \vee)

Forme Prenex

But: placer tous les quantificateurs au début de la formule.

Une formule est dite en forme *Prenex* si tous les quantificateurs apparaissent au début.

Théorème. Il est toujours possible de transformer une formule en une formule équivalente sous forme Prenex.

Méthode: on applique autant de fois que nécessaire les équivalences

$$\neg \forall x w_1 = \exists x \neg w_1$$

$$\neg \exists x w_1 = \forall x \neg w_1$$

$$(\forall x w_1) \wedge w_2 = \forall x (w_1 \wedge w_2), \text{ (si } x \text{ n'apparaît pas dans } w_2)$$

$$(\forall x w_1) \vee w_2 = \forall x (w_1 \vee w_2), \text{ (si } x \text{ n'apparaît pas dans } w_2)$$

Mise en forme prenex

Exemple

$$\forall x \forall y (\text{enseigne}(x, y) \Rightarrow \exists z \text{diplômé}(x, z))$$

$$= \forall x \forall y (\neg \text{enseigne}(x, y) \vee \exists z \text{diplômé}(x, z))$$

$$= \forall x \forall y \exists z (\neg \text{enseigne}(x, y) \vee \text{diplômé}(x, z))$$

$$= \forall x \forall y \exists z (\text{enseigne}(x, y) \Rightarrow \text{diplômé}(x, z)).$$

Skolemisation

But: supprimer les quantificateurs \exists

Idée: quand on a

$$\forall x \exists y p(x, y)$$

cela signifie que pour chaque x on peut trouver un y tel que $p(x, y)$.

On pourrait donc définir une fonction f qui nous fournit une bonne valeur de y à partir d'une valeur de x .

On récrit

$$\forall x p(x, f(x))$$

La fonction dépend de toutes les variables qui viennent avant y dans la formule.

Skolemisation (2)

Exemple

$$A = \forall x \forall y \exists z (\text{enseigne}(x, y) \Rightarrow \text{diplomé}(x, z)).$$

$$\text{skolem}(A) = \forall x \forall y (\text{enseigne}(x, y) \Rightarrow \text{diplomé}(x, f(x, y))).$$

$$A = \forall x \exists u. \forall y \exists z (p(x, u) \wedge (q(u, y) \Rightarrow r(y, z))).$$

$$\text{skolem}(A) = \forall x \forall y (p(x, f(x)) \wedge (q(f(x), y) \Rightarrow r(y, g(x, y)))).$$

Propriété de la skolemisation

$\text{skolem}(A)$ n'est en général pas équivalente à A !

mais

Théorème. A est satisfaisable si et seulement si $\text{skolem}(A)$ l'est

Forme normale conjonctive

Une **ou-clause** est une formule composée de disjonctions de littéraux positifs ou négatifs.

$$\text{Ex. } p(x, y) \vee q(x, z, u) \vee \neg r(t, x).$$

Une formule est sous **forme normale conjonctive** (FNC) si c'est la conjonction de ou-clauses

$$\text{Ex. } (p(x, y) \vee q(x, z, u) \vee \neg r(t, x)) \wedge (\neg p(a, y) \vee t(u)) \wedge (d(x))$$

Si w est une formule sans quantificateurs

il existe un algorithme qui fournit une formule équivalente w' qui est en FNC.

Exemple de normalisation

$$\forall x \forall y ((\text{enseigne}(x, y) \vee \text{agréé}(x)) \Rightarrow \exists z \text{diplomé}(x, z))$$

$$= \forall x \forall y (\neg (\text{enseigne}(x, y) \vee \text{agréé}(x)) \vee \exists z \text{diplomé}(x, z))$$

$$= \forall x \forall y \exists z (\neg (\text{enseigne}(x, y) \vee \text{agréé}(x)) \vee \text{diplomé}(x, z))$$

Skolemisation

$$\forall x \forall y (\neg (\text{enseigne}(x, y) \vee \text{agréé}(x)) \vee \text{diplomé}(x, f(x, y)))$$

FNC

$$= \forall x \forall y ((\neg \text{enseigne}(x, y) \wedge \neg \text{agréé}(x)) \vee \text{diplomé}(x, f(x, y)))$$

$$= \forall x \forall y ((\neg \text{enseigne}(x, y) \vee \text{diplomé}(x, f(x, y)))$$

$$\wedge (\neg \text{agréé}(x) \vee \text{diplomé}(x, f(x, y)))$$

Forme clausale

$$\neg \text{enseigne}(x, y) \vee \text{diplomé}(x, f(x, y)), \neg \text{agréé}(x) \vee \text{diplomé}(x, f(x, y))$$

Principe de résolution

Un autre système de déduction

Adapté au traitement automatique

(système experts, langage Prolog, etc.)

Même principe de base qu'en logique des propositions.

Mais il faut tenir compte des variables

====> étapes d'unification

Résolution de base

soit les deux clauses

$$\kappa_1 = \lambda \vee \kappa_1'$$

$$\kappa_2 = \neg \lambda \vee \kappa_2'$$

le résolvant de κ_1 et κ_2 est

$$\kappa_1' \vee \kappa_2'$$

Résolution générale (avec unification)

Soit

$$\kappa_1 = \lambda \vee \kappa_1'$$

$$\kappa_2 = \neg \mu \vee \kappa_2'$$

Soit σ la "plus petite" substitution telle que $\lambda\sigma = \mu\sigma$. on obtient le résolvant

$$\kappa_r = \sigma\kappa_1' \vee \sigma\kappa_2'$$

Exemple

$$\kappa_1 = \neg p(x, y) \vee q(x)$$

$$\kappa_2 = p(a, b)$$

$p(x,y)$ et $p(a, b)$ sont unifiables par la substitution $\{x/a, y/b\}$ et donnent le résolvant

$$q(a)$$

Thm de de Robinson

Soit ζ une formule sans quantificateurs en forme normale conjonctive et

$$\gamma = \forall b_1 \forall b_2 \dots \forall b_n \zeta$$

γ n'est pas satisfaisable ssi il y a une suite de résolutions des clauses de ζ qui conduisent à la clause vide.

Exemple

$$\kappa_1 = \neg p(x,y) \vee q(x), \kappa_2 = p(a, b), \kappa_3 = \neg q(a)$$

par résolution de κ_1 et κ_2 on obtient

$$\kappa_4 = q(a)$$

puis par résolution de κ_3 et κ_4

$$\kappa_5 = \langle \text{vide} \rangle$$

Références

Benzaken, C. *Systèmes formel: introduction à la logique et à la théorie des langages*, Masson, Paris, 1991.

Bundy, A. *The Computer Modelling of Mathematical Reasoning*, Academic Press, London, 1983

Ben-Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science*, Prentice-Hall, 1993.

Harel, D., Kozen, D., Tiuryn, J. *Dynamic Logic*, MIT Press, 2000, chapitre 3.

Substitution et instantiation

L'opération de substitution consiste à remplacer (purement syntaxiquement) certaines variables libres d'une formule w par des termes.

w une formule où x_1, \dots, x_n sont des variables libres,

σ la substitution $(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n)$,

$w\sigma$ = la formule w où toutes les occurrences des x_i sont remplacées par t_i .

Exemples.

$$w = q(x_1, y_1) \Leftrightarrow \forall x_2. (r(x_2, z_1) \vee s(x_2, y_1))$$

$$\sigma = (z_8/x_1, g(a, b)/y_1)$$

$$w\sigma = q(z_8, g(a, b)) \Leftrightarrow \forall x_2. (r(x_2, z_1) \vee s(x_2, g(a, b)))$$

$$\sigma' = (c_{23}/z_1)$$

$$w\sigma' = q(x_1, y_1) \Leftrightarrow \forall x_2. (r(x_2, c_{23}) \vee s(x_2, y_1))$$

Une substitution **instancie** x si elle remplace x par un terme où n'apparaît aucune variable.

(c_{23}/z_1) instancie z_1

$(z_8/x_1, g(a, b)/y_1)$ instancie y_1 mais pas x_1 .