

Théories logiques et axiomatisation

Théorie

Exemples de théories

- théories égalitaires
- les nombres entiers et l'arithmétique
- les ensembles
- les graphes

Théorie logique

Une théorie logique est un

ensemble de formules d'un langage logique

Une théorie est *fermée*

si elle contient toutes ses conséquences logiques

Théorie axiomatisable

G est un ensemble de formules,

$$T_G = \{ g \mid G \models g \}$$

la théorie axiomatisable

dont les axiomes sont les formules de G.

Ex. Théorie des feux bicolores

Vocabulaire

prédicats : rouge(_), vert(_), perpendiculaires(_, _)

constantes : a, b, c, ...

Axiomes

1. un feu est soit rouge, soit vert

$$\forall x \text{ rouge}(x) \vee \text{vert}(x)$$

2. un feu ne peut être rouge et vert

$$\forall x \neg(\text{rouge}(x) \wedge \text{vert}(x))$$

2. deux feux perpendiculaires ne peuvent être verts tous les deux

$$\forall x \forall y \text{ perpendiculaires}(x, y) \Rightarrow \neg(\text{vert}(x) \wedge \text{vert}(y))$$

La théorie

Conséquences des axiomes:

$$|= \text{perpendiculaires}(a, b) \Rightarrow \neg(\text{vert}(a) \wedge \text{vert}(b))$$

$$|= \text{vert}(a) \wedge \text{perpendiculaires}(a, b) \Rightarrow \neg \text{vert}(b)$$

$$|= \text{vert}(a) \wedge \text{perpendiculaires}(a, b) \Rightarrow \text{rouge}(b)$$

$$|= \text{vert}(a) \wedge \neg \text{rouge}(c) \Rightarrow \text{vert}(a) \wedge \text{vert}(c)$$

$$|= \text{vert}(a) \wedge \neg \text{rouge}(c) \Rightarrow \neg \neg(\text{vert}(a) \wedge \text{vert}(c))$$

$$|= \text{vert}(a) \wedge \neg \text{rouge}(c) \Rightarrow \neg \text{perpendiculaires}(a, c)$$

etc.

Théorie égalitaire

Dans une théorie on veut avoir une notion d'égalité.

On ajoute au vocabulaire le prédicat binaire =

On ajoute les axiomes :

- réflexivité : $\forall x \ x=x$
- symétrie : $\forall x \forall y \ (x=y \Rightarrow y=x)$
- transitivité : $\forall x \forall y \forall z \ (x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z)$

Axiomes de congruence

On doit pouvoir substituer des termes égaux dans les formules sans changer leur valeur.

Pour chaque prédicat P du vocabulaire on a un axiome :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n \ (x_1=y_1 \wedge \dots \wedge x_n=y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow P(y_1, \dots, y_n))$$

Pour chaque fonction f on a :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n \ (x_1=y_1 \wedge \dots \wedge x_n=y_n \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n))$$

C'est une famille d'axiomes, autant qu'il y a de prédicats et de fonctions dans le vocabulaire.

Théorie et modélisation logique

Rappel : modéliser = créer une approximation de la réalité

Modélisation logique:

- représenter les objets (constantes, variables, fonctions)
- leurs relations et propriétés (prédicats)
- les faits et règles (loi physiques, règlements, etc.) (axiomes)

But : théorie = tous les faits et règles observés dans la réalité
= expliquer la réalité par un (petit) ensemble de formules (axiomes)

Exemple : monde des blocs

Prédicats: cube(_), boule(_), sur(_, _), au-dessus(_, _), _=_

Axiomes:

Exemple : théorie des groupes

Prédicat : =

Fonctions : +, 0 (constante)

Axiomes :

$\forall x (0+x = x \wedge x = x+0)$ (0 est élément neutre)

$\forall x \forall y \forall z (x+(y+z) = (x+y)+z)$ (associativité)

$\forall x \exists y (x+y = 0 \wedge y+x = 0)$ (inverse)

Congruence de l'égalité :

$\forall x \forall y (x = y \wedge z = u \Rightarrow x+y = z+u)$

Théorie numérique de Peano (PA0)

On veut représenter les nombres entiers

On ne peut pas définir une infinité de constantes 0, 1, 2, 3, ...

On veut exprimer la règle d'induction (raisonnement par récurrence)

Idée : on peut représenter tous les nombres à partir de 0 et d'une fonction "successeur" S

$1 = S(0)$, $2 = S(S(0))$, etc.

Vocabulaire :

Fonction : S(_), 0 (constante)

Prédicat : =

Axiomes :

Tout nombre est soit 0 soit le successeur d'un autre nombre

$\forall x (x = 0 \vee \exists y S(y) = x)$

Il n'y a rien avant 0

$\forall x \neg S(x) = 0$

Un nombre n'a qu'un seul prédécesseur

$\forall x \forall y (S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$

Règle de récurrence pour toute formule B

$B(0) \wedge \forall x (B(x) \Rightarrow B(S(x))) \Rightarrow \forall x B(x)$

Avec l'addition

La théorie PA0 ne permet pas d'exprimer la notion d'addition ou la comparaison

Il faudrait une formule infinie pour dire " $x < y$ "

$x = S(y) \vee x = S(S(y)) \vee x = S(S(S(y))) \vee \dots$

On doit ajouter la fonction $+$ et les axiomes correspondants

$$\forall x \ x+0 = x$$

$$\forall x \ \forall y \ x+S(y) = S(x+y)$$

Ne permet pas d'exprimer " $x \times y = z$ "

Théorie de l'arithmétique du 1er ordre

Vocabulaire : prédicat $=^1$, fonctions $+^2$, \times^2

Axiomes non logiques :

$$A1. \neg(0 = x+1),$$

$$A2. x = y \Rightarrow x+1 = y+1,$$

$$A3. x+0 = x,$$

$$A4. x + (y+1) = (x+y) + 1,$$

$$A5. x \times 0 = 0,$$

$$A6. x \times (y+1) = (x \times y) + x,$$

$$A7. B(0) \wedge \forall x (B(x) \Rightarrow B(x+1)) \Rightarrow \forall x B(x), \text{ B une formule..}$$

Permet d'exprimer toute fonction calculable (théorème de représentation)

Calcul des conséquences logiques

Problème: tester si une formule F appartient à la théorie

Tester si

$$\text{Axiomes} \models F$$

Test direct (trouver tous les modèles) ... infaisable

\Rightarrow

Système de preuve

Axiomes "logiques" + règles d'inférence

+ utilisation des équivalences

Exemple : Axiomes logiques

A, B, C sont des formules quelconques

$$L1: B \Rightarrow (C \Rightarrow B),$$

$$L2: (B \Rightarrow (C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow D)),$$

$$L3: B \wedge C \Rightarrow B,$$

$$L4: B \wedge C \Rightarrow C,$$

$$L5: B \Rightarrow (C \Rightarrow B \wedge C),$$

$$L6: B \Rightarrow B \vee C,$$

$$L7: C \Rightarrow B \vee C,$$

$$L8: (B \Rightarrow D) \Rightarrow ((C \Rightarrow D) \Rightarrow (B \vee C \Rightarrow D)),$$

Axiomes logiques (suite)

- L9: $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow \neg B)$ (reductio ad absurdum),
L10: $\neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ (ex falso sequitur quodlibet),
L11: $B \vee \neg B$ (tertium non datur)

F n'importe quelle formule, t un terme tel que la substitution $F(x/t)$ est admissible (en particulier, t peut être x lui-même):

- L12: $\forall x F(x) \Rightarrow F(t)$ (cas particulier, $\forall x F(x) \Rightarrow F(x)$),
L13: $F(t) \Rightarrow \exists x F(x)$ (cas particulier, $F(x) \Rightarrow \exists x F(x)$),

G une formule qui ne contient pas x comme variable libre :

- L14: $\forall x (G \Rightarrow F(x)) \Rightarrow (G \Rightarrow \forall x F(x))$,
L15: $\forall x (F(x) \Rightarrow G) \Rightarrow (\exists x F(x) \Rightarrow G)$,

Règles d'inférence

Modus Ponens: $B \Rightarrow C, B \vdash C$

Generalization: $F(x) \vdash \forall x F(x)$,