



Théorie des ensembles

Objectif:

Définir la notion d'ensemble axiomatiquement

- Comment construire des ensembles ?
- Qu'est-ce que l'appartenance à un ensemble, l'égalité d'ensembles ?
- Comment définir des relations et fonctions ?

Peut-on éviter les contradictions entre axiomes ?

Y a-t-il un ensemble des ensembles ?

Référence

R. Cori, D. Lascar. Logique mathématique I et II, Masson, Paris, 1993



Langage formel de la théorie des ensembles

On prend le langage de la logique du 1er ordre avec

les symboles de prédicat

'=' (binaire)

'égalité des ensembles, --> à distinguer des autres égalités.

'∈' (binaire)

appartenance d'un objet à un ensemble

les variables : $x, y, z, x_1, x_2, \dots, X, Y, Z, X_1, X_2, \dots$

les constantes : a, b, c, a_1, a_2, \dots

Notation: $F[x_1, \dots, x_n]$ une formule ouverte où x_1, \dots, x_n sont les variables libres.



Théorie de Zermelo Fraenkel (ZF)

Axiome d'extensionnalité (égalité d'ensembles)

Axiomes de construction :

Axiome de la paire

Axiome de la réunion

Axiome des parties

Axiome de compréhension

Axiome de remplacement

Théorie ZFC

Axiome de choix

Et encore...

Axiome de fondation, axiomes de grands cardinaux, ...



Axiome d'extensionnalité

Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils possèdent les mêmes éléments.

Même *extension* :

$$\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y)$$

Notion de sous-ensemble

on note

$$X \subseteq Y$$

la formule

$$\forall z (z \in X \Rightarrow z \in Y)$$

par l'axiome : si $X \subseteq Y$ et $Y \subseteq X$ alors $X = Y$



Axiome de la paire

Avec deux ensembles x_1 et x_2

on peut construire un ensemble y qui les contient les deux.

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow (z = x_1 \vee z = x_2))$$

On note $\{a, b\}$ l'ensemble satisfaisant cette formule pour

$$x_1 = a \text{ et } x_2 = b.$$

Remarque cruciale

Il n'y a qu'une seule sorte d'objets : les ensembles

Un ensemble peut être élément d'un autre ensemble



Paire (suite)

Notation

Si $a = b$, on note $\{a\}$ la paire $\{a, a\}$

Remarque

$\{a, b\} = \{a', b'\}$ ssi $a = a'$ et $b = b'$ ou $a = b'$ et $b = a'$

$\{a\} = \{a'\}$ ssi $a = a'$



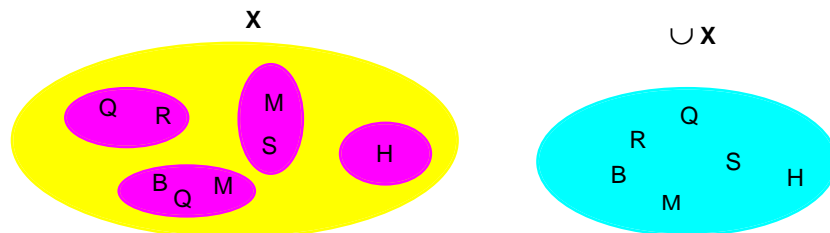
Axiome de la réunion

On peut construire

l'ensemble Y qui est la réunion de tous les ensembles faisant partie d'un ensemble donné X .

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow \exists u (u \in X \wedge z \in u))$$

notation : $Y = \cup X$



Propriétés de la réunion

Si X est la paire $\{a, b\}$, l'ensemble $Y = \cup X$ satisfait

$$\forall z (z \in Y \Leftrightarrow \exists u (u \in X \wedge z \in u), \text{ c-à-d}$$

$$\forall z (z \in Y \Leftrightarrow z \in a \vee z \in b)$$

On note cet ensemble $a \cup b$.

$\{a, b\} \cup \{c\}$ est noté $\{a, b, c\}$

On a :

$$z \in \{a, b, c\} \Leftrightarrow z \in \{a, b\} \vee z \in \{c\} \Leftrightarrow (z = a) \vee (z = b) \vee (z = c)$$

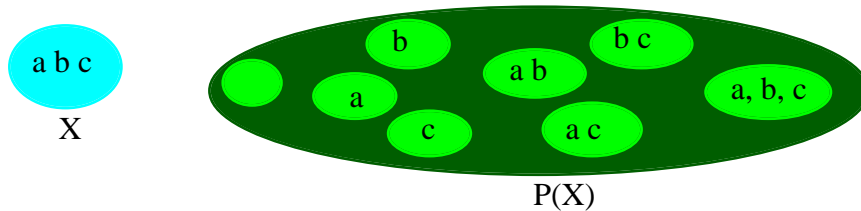
etc.



Axiome de partition

On peut former un ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensemble d'un ensemble donné x . On note cet ensemble $P(x)$.

$$\forall X \exists Y \forall Z (Z \in Y \Leftrightarrow \forall u (u \in Z \Rightarrow u \in X))$$



Si x a n éléments, Il y a 2^n sous-ensembles

D'où la notation alternative pour $P(x)$: 2^x



Une conséquence

Si on prend comme formule $F[z] : \neg (z = z)$

On a

$$\forall X \exists Y \forall Z (Z \in Y \Leftrightarrow (Z \in X \wedge \neg (Z = Z)))$$

Comme aucun z ne peut satisfaire $\neg (z = z)$

- il n'y a aucun élément dans y
- donc il existe un *ensemble vide*

Par l'axiome d'extensionnalité il est unique

Notation: \emptyset ou $\{ \}$



Schéma d'axiome de compréhension

Pour former l'ensemble de tous les éléments de X qui satisfont une formule F .

Il s'agit d'une infinité d'axiomes de la forme:

$$\forall X \exists Y \forall Z (Z \in Y \Leftrightarrow (Z \in X \wedge F[Z]))$$

où F est une formule du langage des ensembles et n est un entier.

On note l'ensemble Y par

$$\{ w \in X \mid F[w] \}.$$

Rem. F peut avoir d'autres paramètres : $F[z, v_1, v_2, \dots, v_n]$

Tentative de simplification de l'ax. de compréhension

$$\exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow F[z])$$

c'est à dire

$$y = \{ w \mid F[w] \}$$

on prend

$$F[z] = z \notin z$$

pour définir l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes.

d'après l'axiome simplifié:

$$\exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \notin z)$$



(suite) Paradoxe de Russel

on a :

$$\exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \notin z)$$

si on prend $z = y$

$$y \in y \Leftrightarrow (y \notin y).$$

est toujours faux, donc l'axiome est inconsistent

Avec l'axiome complet on a :

- $\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge z \notin z)$
- pour $z=y$: $y \in y \Leftrightarrow y \in x \wedge y \notin y$,
- qui est satisfaisable ($y \notin y$ et $y \notin x$).



L'ensemble de tous les ensembles ...

Peut-on avoir un ensemble a qui contient tous les autres comme éléments ?

a doit satisfaire la formule $\forall v (v \in a)$

l'axiome de compréhension avec la formule $z \notin z$ est:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin z))$$

En posant $x = a$ on en déduit

$$\exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow (z \in a \wedge z \notin z))$$

donc on a un ensemble b tel que

$$\forall z (z \in b \Leftrightarrow (z \in a \wedge z \notin z))$$



(suite)

$$\forall z (z \in b \Leftrightarrow (z \in a \wedge z \notin z))$$

En posant $z = b$ on déduit

$$b \in b \Leftrightarrow (b \in a \wedge b \notin b)$$

Comme a contient tous les ensembles (par hypothèse), $b \in a$ est vrai

$$b \in b \Leftrightarrow (b \notin b)$$

Ce qui ne peut jamais être vrai

Donc nos formules de départ sont inconsistentes

Donc la formule $\neg \exists a \forall v (v \in a)$ est une conséquence des axiomes.

Donc *a n'existe pas*



Axiome de remplacement

Formule $F[x, y]$ *fonctionnelle* si

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 (F[x, y_1] \wedge F[x, y_2] \Rightarrow y_1 = y_2)$$

Schéma d'axiome de remplacement

$$F[x, y] \text{ fonctionnelle} \Rightarrow (\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge F[w, z])))$$

y est l'image de x par la «fonction» F



Paires

La *paire ordonnée* (a, b) est l'ensemble

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}$$

On démontre

si $(a, b) = (a', b')$ alors $a = a'$ et $b = b'$

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$$

$$\Leftrightarrow (\{a\} = \{a'\} \wedge \{a, b\} = \{a', b'\}) \vee (\{a\} = \{a', b'\} \wedge \{a, b\} = \{a'\})$$

$$\Leftrightarrow (\{a\} = \{a'\} \wedge \{a, b\} = \{a', b'\})$$

$$\Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$$

Relations et Applications

Relation n-aire sur a : sous-ensemble de $a \times a \times \dots \times a$ (n fois) $= a^n$

Relation n -aire sur a_1, a_2, \dots, a_n , sous-ensemble de $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$

Application f : un ensemble de paires ordonnées (x, y) qui satisfait :

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 ((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2$$

domaine (ensemble de départ) de f ,

$$\{x \in \bigcup \bigcup f \mid \exists y (x, y) \in f\}$$

image (ensemble d'arrivée) de f

$$\{y \in \bigcup \bigcup f \mid \exists x (x, y) \in f\}$$

Application de a dans b :

application dont le domaine est a et l'image b

n-tuples et produits

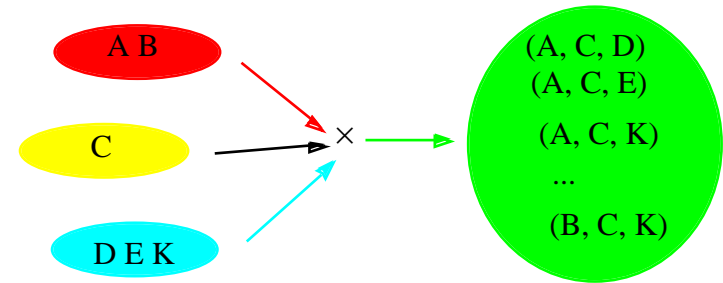
triple : $(a, b, c) = (a, (b, c))$

n-tuple : $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, (a_2, \dots, a_n)) = (a_1, (a_2, (\dots, a_n))) = \dots$

produit cartésien : $e_1 \times e_2 \times \dots \times e_n$

l'unique ensemble p tel que :

$$\forall x (x \in p \Leftrightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n (x_1 \in e_1 \wedge \dots \wedge x_n \in e_n \wedge x = (x_1, \dots, x_n)))$$



Produits et axiome de choix

Si I est un ensemble

Une **famille d'ensembles indexée** par un ensemble I est une application dont le domaine est I

a : une famille indexée par I , $a_i = a(i)$ = image par a de $i \in I$

Produit $\prod_{i \in I} a_i =$

l'ensemble des applications f telles que pour tout $i \in I$, $f(i) \in a_i$.

Différence (intuitive) avec le produit cartésien: I peut être infini

Axiome de choix

si aucun a_i n'est vide alors $\prod_{i \in I} a_i$ est non vide.

Ça à l'air complètement évident mais ça ne l'est pas, on ne peut le déduire des autres axiomes !